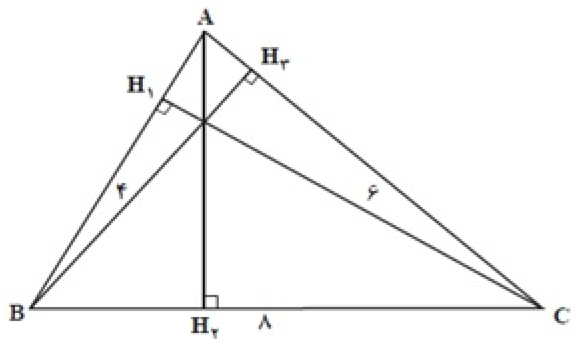
۱ چون در هر مثلث نسبت انـدازه‌هـای هر دو ضـلع، بـا عکس نسـبت ارتفـاع‌هـای وارد بر آن‌ها برابر است، بنابراین بلنـدترین ارتفاع مثلث به کوتاه‌ترین ضلع مثلث یعنی ضلع AB که طول آن ۴ است وارد می‌شود؛ بنابراین:

$$\frac{AH_{۲}}{CH_{۱}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AH_{۲}}{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}} = \frac{۴}{۸} \Rightarrow AH_{۲} = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\frac{BH_{۳}}{CH_{۱}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BH_{۳}}{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow BH_{۳} = \sqrt{۱۵}$$



۲ رأس A در سه مثلث $\overset{\Delta}{ACE}$ و $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABD}$ مشترک است و ضلع زیر رأس A در هر سه مثلث روی یک خط قرار دارد، بنابراین مساحت این سه مثلث متناسب با طول ضلع زیر به رأس A در آن‌ها است پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}} = \frac{EC}{DE} \Rightarrow \frac{۳}{۱} = \frac{EC}{DE} \Rightarrow DE = \frac{۱}{۳}EC$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{EC}{BD} \Rightarrow \frac{۲}{۱} = \frac{EC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{۱}{۲}EC$$

بنابراین:

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\frac{۱}{۲}EC}{\frac{۱}{۲}EC} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + EC}{\frac{۱}{۳}EC} = \frac{\frac{۱}{۲}EC + \frac{۱}{۳}EC + EC}{\frac{۱}{۳}EC} = \frac{\frac{۱۱}{۶}EC}{\frac{۱}{۳}EC} = \frac{۱۱}{۲}$$

۳ در مثلث $\overset{\Delta}{OA'B'}$ چون $AB \parallel A'B'$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'} \qquad (۱)$$

در مثلث $\overset{\Delta}{OB'C'}$ چون $BC \parallel B'C'$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \qquad (۳)$$

در مثلث $\overset{\Delta}{OA'C'}$ باتوجه‌به رابطهٔ (۳) و عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود: $AC \parallel A'C'$.

۴ در مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ چون $BC \parallel DE$ طبق قضیهٔ تالس داریم:

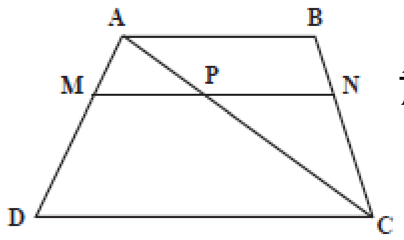
$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \qquad (۱)$$

در مثلث $\overset{\Delta}{ADF}$ چون $BE \parallel DF$ طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲} = AC.AF$$

۵ یکی از قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ مثلاً قطر AC را رسم می‌کنیم و نقطـهٔ برخورد آن با پاره‌خط MN را P می‌نامیم. در مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ چون $MP \parallel DC$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:



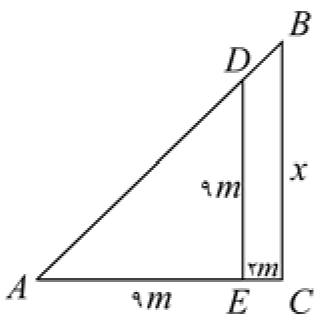
$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} \qquad (۱)$$

در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ چون $PN \parallel AB$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AP}{PC} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۶ فرض کنید فاصله توپ از زمین مسابقه برابر x باشد. طبق اطلاعات صورت مسئله شکل زیر را خواهیم داشت:



چون $DE \| BC$ است، طبق قضیهٔ تالس در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۹۰۰}{۱۱۰۰}=\frac{۲۴۳}{x} \Rightarrow x=۲۹۷cm$$

قد این بازیکن $۱۸۰\,cm$ است و توپ هم $۳۰\,cm$ بالای سر اوست، بنابراین:

$$\text{میزان پرش بازیکن}=۲۹۷-۱۸۰-۳۰=۸۷\,cm$$

۷

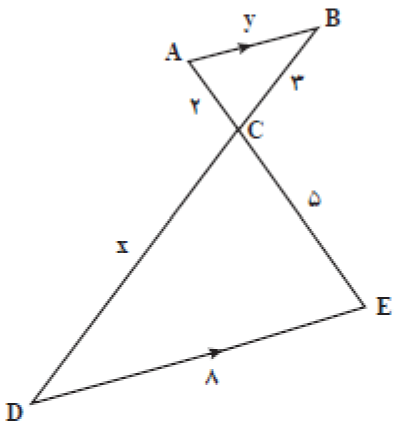
الف

$$AB \| DE \Rightarrow \hat{A}=\hat{E} \text{ و } \hat{B}=\hat{D}$$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{CDE}$ به حالت دو زاویه باهم متشابه هستند؛ بنابراین:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{y}{۸}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow y=\frac{۱۶}{۵}$$

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۳}{x} \Rightarrow x=\frac{۱۵}{۲}$$



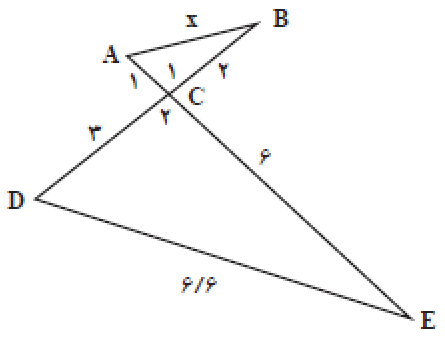
ب داریم:

$$\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{CE}=\frac{۱}{۳}$$

$$\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DCE}$ به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین مساوی، متشابه هستند؛ بنابراین:

$$\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{x}{۶/۶} \Rightarrow x=۲/۲$$

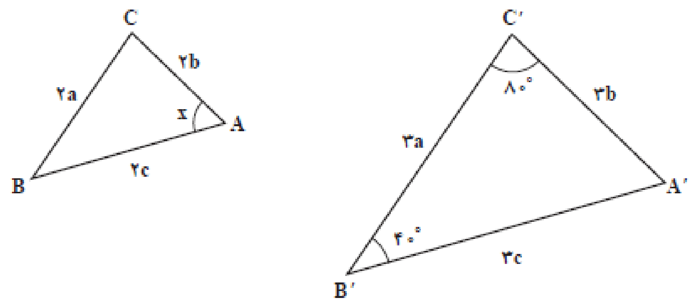


پ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{۲}{۳}$$

دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ به حالت سه ضلع متناسب، متشابه هستند؛ بنابراین زاویه‌های مقابل به اضلاع متناسب، برابرند پس:

$$x = \hat{A} = \hat{A'} = ۱۸۰ - (۸۰ + ۴۰) = ۶۰^\circ$$



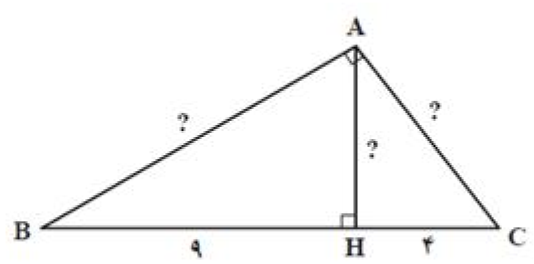
۸

الف

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۹ \times ۱۳ = ۱۱۷ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۱۷}$$

$$AC^۲ = CH \times CB \Rightarrow AC^۲ = ۴ \times ۱۳ = ۵ \Rightarrow AC = \sqrt{۵۲}$$

$$AH^۲ = BH \times HC = ۹ \times ۴ = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶$$

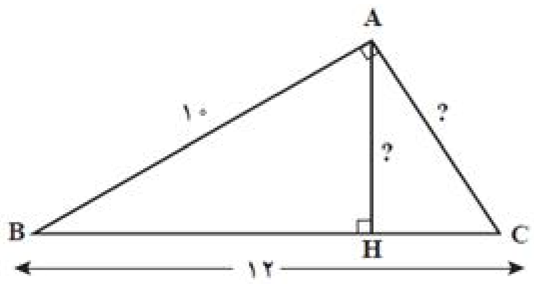


ب

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۱۰^{۲} = BH \times ۱۲ \Rightarrow BH = \frac{۱۰۰}{۱۲} = \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow CH = ۱۲ - \frac{۱۰۰}{۱۲} = \frac{۴۴}{۱۲} = \frac{۱۱}{۳}$$

$$AC^{۲} = CH \times CB = \frac{۱۱}{۳} \times ۱۲ = ۴۴ \Rightarrow AC = \sqrt{۴۴}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۲ = ۱۰ \times \sqrt{۴۴} \Rightarrow AH = \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$$

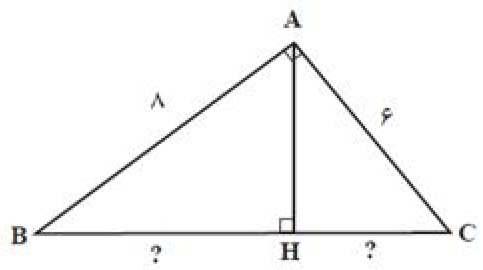


پ

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۸^{۲} = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = ۶/۴$$

$$CH = BC - BH = ۱۰ - ۶/۴ = ۳/۶$$



ت

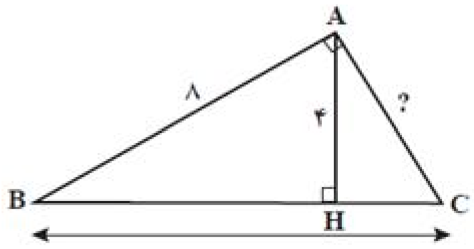
مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ قائم‌الزاویه است $\Rightarrow AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۸^{۲} = ۴^{۲} + BH^{۲}$

$$\Rightarrow BH^{۲} = ۴۸ \Rightarrow BH = ۴\sqrt{۳}$$

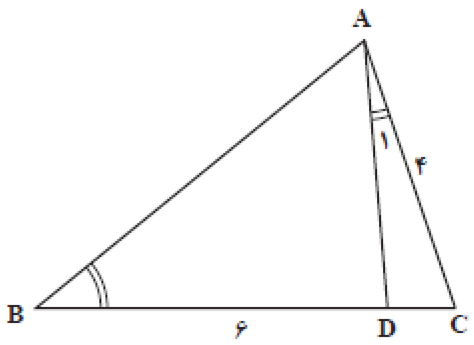
$$AH^{۲} = BH \times HC \Rightarrow ۴^{۲} = (۴\sqrt{۳}) \times HC \Rightarrow HC = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$BC = BH + HC = ۴\sqrt{۳} + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

$$AC^{۲} = BC^{۲} - AB^{۲} = \frac{۲۵۶}{۳} - ۶۴ = \frac{۶۴}{۳} \Rightarrow AC = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$



۹



$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_۱ = \hat{B} \\ \text{مشترک } \hat{C} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

بنابراین:

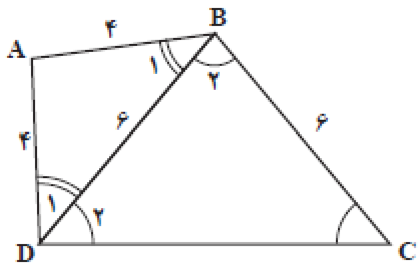
$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{DC}{۴} = \frac{۴}{BD + DC} \Rightarrow \frac{DC}{۴} = \frac{۴}{۶ + DC}$$

$$\Rightarrow (۶ + DC)DC = ۱۶ \Rightarrow DC^{۲} + ۶DC - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (DC + ۸)(DC - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} DC = -۸ \text{ غ ق ق} \\ DC = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = BD + DC = ۶ + ۲ = ۸$$

۱۰



$$\left.\begin{aligned} BC = BC &\Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{C} \\ AB = AD &\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ AB \parallel DC &\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{C} = \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲$$

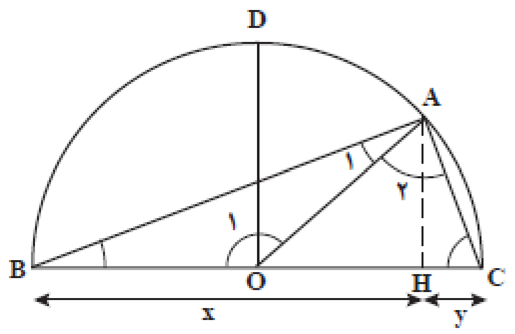
بنابراین مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ به حالت دو زاویهٔ برابر، متشابه هستند پس:

$$\frac{DC}{BD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{DC}{۶} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow DC = ۹$$

۱۱

الف چون زاویهٔ A یک زاویهٔ محاطی مقابل به کمان ${۱۸۰}^\circ$ درجه است؛ بنابراین $\hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$

ب مطابق شکل واضح است که $OD \geq AH$



پ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ طبق روابط طولی داریم:

$$AH^۲ = CH \times HB = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

از طرفی OD برابر شعاع دایره است پس BC دو برابر OD است؛ بنابراین:

$$x + y = ۲OD \Rightarrow OD = \frac{x+y}{۲}$$

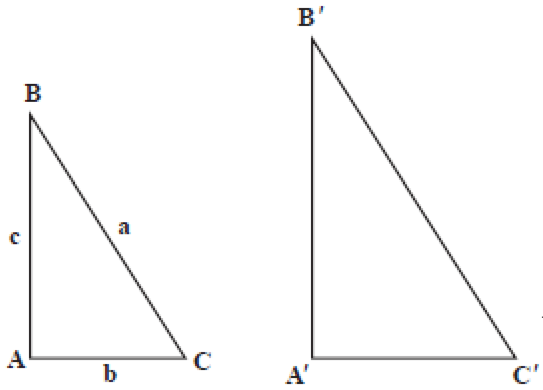
بنابراین داریم:

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

ت بله؛ این نامساوی صحیح است و بیان می‌دارد که میانگین حسابی دو عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آن‌ها است.

۱۲ دو پاره‌خط $A'B'$ و $A'C'$ را که بر هم عمود هستند و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ هستند را رسم می‌کنیم.

B' و C' را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ حاصل شود.



طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ داریم:

$$(B'C')^{۲} = (A'B')^{۲} + (A'C')^{۲} = (AB)^{۲} + (AC)^{۲} = c^{۲} + b^{۲}$$

اما طبق صورت مسئله (قسمت الف) داریم $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ بنابراین:

$$B'C'^{۲} = a^{۲} \Rightarrow B'C' = a \Rightarrow B'C' = BC$$

پس دو مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند؛ بنابراین مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ نیز قائم‌الزاویه است.

۱۳ مثلث‌های MNC و ABC دو زاویهٔ هم‌اندازه دارند؛ درنتیجه متشابه‌اند.

$$\hat{M} = \hat{B}, \hat{C} = \hat{C} \Rightarrow \Delta MNC \sim \Delta ABC$$

اکنون با نوشتن نسبت تشابه داریم:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

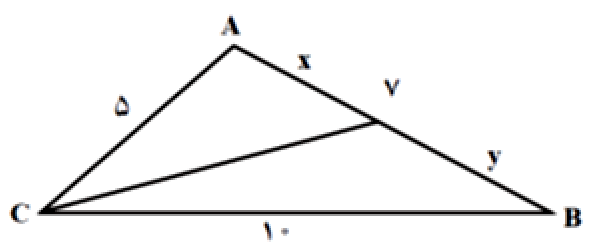
به جای MC, $\frac{AC}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{AC}{۲BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^{۲} = ۲NC.BC = ۲NC(NC + NB) \Rightarrow AC^{۲} = ۲ \times ۲(۲ + ۴) = ۲۴ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۶}$$

۱۴

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD + CD}{CD} = \frac{۷ + ۸}{۸}$$
$$\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow CD = \frac{۸ \times ۵}{۱۵} = \frac{۸}{۳}$$
$$AD = AC - CD = ۵ - \frac{۸}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

۱۵



می‌دانیم که نیمساز هر زاویه، قاعدهٔ وارد بر آن را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند؛ بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{x}{۵} = \frac{y}{۱۰} \\ x + y = ۷ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{۵} = \frac{y}{۱۰} = \frac{x+y}{۱۵} = \frac{۷}{۱۵}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{۵} = \frac{۷}{۱۵} \Rightarrow x = \frac{۷}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{y}{۱۰} = \frac{۷}{۱۵} \Rightarrow y = \frac{۱۴}{۳}$$

۱۶

الف می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث ABD و ACD برابر نسبت اضلاع روبه‌روی زاویهٔ A_1 و A_2 در آن‌هاست پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{BD}{DC}$$

ب چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد پس فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویهٔ A یکسان است؛ بنابراین:

$$DH = DH'$$

باتوجه‌به اینکه $\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{BD}{DC}$ است و چون در دو مثلث ABD و ACD ارتفاع‌های DH و DH' برابرند، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آن‌هاست؛ یعنی:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{AB}{AC}$$

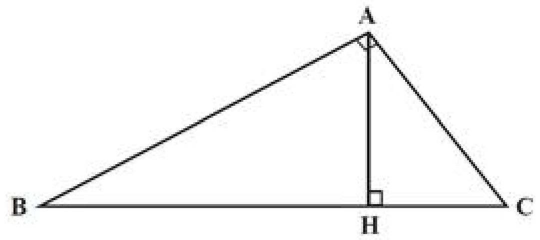
پ باتوجه به این روابط، درستی قضیهٔ نیمسازها اثبات می‌شود؛ یعنی:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

بنابراین نیمساز هر زاویه، قاعدهٔ وارد بر آن را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

۱۷

الف مثلث‌های ABH و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر با $\frac{AB}{BC}$ است.



بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^{۲}$$

به همین ترتیب مثلث‌های ACH و ABC با نسبت تشابه $\frac{AC}{BC}$، متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ACH}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^{۲}$$

ب با جمع دو طرف قسمت اول داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\Delta}{ACH}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{AB}{BC})^{۲} + (\frac{AC}{BC})^{۲} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}} + S_{\overset{\Delta}{ACH}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{AB^{۲}}{BC^{۲}} + \frac{AC^{۲}}{BC^{۲}}$$

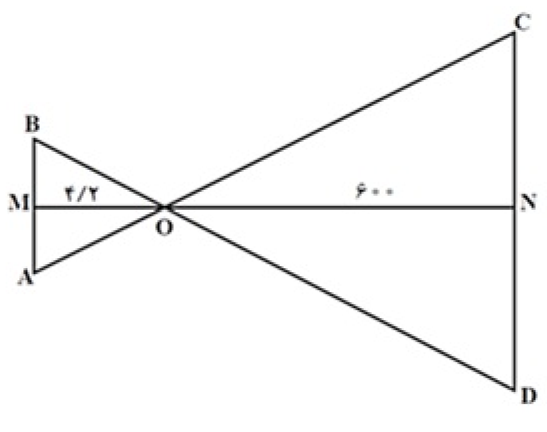
چون $S_{\overset{\Delta}{ABH}} + S_{\overset{\Delta}{ACH}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}}$ است، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{AB^{۲} + AC^{۲}}{BC^{۲}} \Rightarrow \frac{AB^{۲} + AC^{۲}}{BC^{۲}} = ۱$$

$$\Rightarrow AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲}$$

۱۸ واحد همهٔ طول‌های موجود را به cm تبدیل می‌کنیم.

$CD \| AB$ است، بنابراین:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OCD}$$

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث نیز برابر نسبت تشابه است پس:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OM}{ON} \Rightarrow \frac{۳/۵}{CD} = \frac{۴/۲}{۶۰۰} \Rightarrow CD = ۵۰۰cm = ۵m$$

۱۹

$$DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC} \xrightarrow{\text{معکوس کردن دو طرف}} \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

۲۰

الف

$\hat{H} = B\hat{A}C = ۹۰^\circ \; , \; \hat{B} = A\hat{B}H \quad \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

$\hat{H} = B\hat{A}C = ۹۰^\circ \; , \; \hat{C} = A\hat{C}H \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

ب

دو مثلث ABH و ACH متشابه هستند زیرا:

$A\hat{H}B = A\hat{H}C \; , \; A\hat{C}H = B\hat{A}H \; , \; C\hat{A}H = A\hat{B}H$

پ

$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^۲ = BH \times BC$

ت

$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^۲ = HC \times BC$

ث

$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^۲ = HC \times BH$

ج

$AB^۲ + AC^۲ = BC \times BH + BC \times HC = BC(BH + HC) = BC.BC = BC^۲$